矩阵的初等变换教学设计探讨

杜妮

2019年11月17日

第五届全国高校数学微课程教学设计竞赛

竞赛赛制调整为传统赛和精英赛两条赛道。

传统赛内容包括两类：一是“大学数学基础课程”（高等数学、线性代数、概率论与数理统计），参赛者可选择一个组委会发布的知识点及根据前四届获奖情况定义的附加难度系数，来录制完成时长 10-15 分钟（甚至更短）的微课程视频，并提供配套的教学设计与说明、多媒体教学课件以及支撑该知识点教学的相关辅助材料等。二是“大学数学应用案例”，参赛者可不限知识点，选择大学数学课程的某一个知识点或者某一段教学内容，精心设计应用性教学案例，录制视频，并提供配套的教学设计、多媒体教学课件以及相关教学辅助材料等。注意应用案例没有区分难度系数。

精英赛面向前四届已获得一等奖的选手，以及由两位以上现任教指委委员（主办方：大学数学课程教学指导委员会，和支持单位：数学类专业、统计学类专业教学指导委员会，均可）推荐、并经过全国组委会评审的选手，此类选手可不限知识点作为主编征集一章（或：知识点群）完整的教学设计提交，形式仍然以微课程教学设计的要求来完成。

课程名称：线性代数

知识点名称：矩阵的初等变换，初等矩阵，矩阵的秩

知识点编号： 0301,0302,0303

知识点分析

知识点	重点	难点
用消元法求解线性方程组	√	
矩阵的初等变换及其相关定理	√	√
矩阵之间的等价关系	√	
初等矩阵的定义	√	
有关初等矩阵的定理	√	√
用初等变换求逆矩阵	√	
用初等变换解矩阵方程	√	
k阶子式的概念		
矩阵秩的概念和基本性质	√	
矩阵秩的计算	√	√
矩阵秩的性质续	√	√

遵循认知规律 解析重点难点

消元法与矩阵的初等变换

$$\begin{cases}2x+4y=4,\\ x+y=3.\end{cases} \qquad \begin{pmatrix}2&4&4\\1&1&3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x+y=3,\\ 2x+4y=4.\end{cases} \times(-2) \qquad \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix}1&1&3\\2&4&4\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x+y=3,\\ 2y=-2.\end{cases} \times\frac{1}{2} \qquad \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{pmatrix}1&1&3\\0&2&-2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x+y=3,\\ y=-1.\end{cases} \times(-1) \qquad \xrightarrow{r_2\div 2} \begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=4,\\ y=-1.\end{cases} \qquad \xrightarrow{r_1-r_2} \begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

消元法与行阶梯形矩阵

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_4+x_5=5\\ \qquad\qquad x_3+\frac{1}{2}x_4 \quad =\frac{3}{2}\\ \qquad\qquad\qquad x_4-x_5=4\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&0&3&1&5\\0&0&1&\frac{1}{2}&0&\frac{3}{2}\\0&0&0&1&-1&4\end{pmatrix}$$

遵循认知规律 解析重点难点

对比$E(i,j(k))$左乘与右乘所对应的初等变换

例1 求$E(13(2))A$, $A\,E(13(2))$, 其中

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\-1&0&1&2\end{pmatrix}.$$

解

$$E(1,3(2))A=\begin{pmatrix}-1&2&5&8\\5&6&7&8\\-1&0&1&2\end{pmatrix},$$

$$AE(1,3(2))=\begin{pmatrix}1&2&5&4\\5&6&7&8\\-1&0&-1&2\end{pmatrix}.$$

左行右列
由近及远

例2

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+2r_3}\begin{pmatrix}1&2&3\\18&21&24\\7&8&9\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\18&21&24\\7&8&9\end{pmatrix}$$

意义 “箭头”改“等号”

遵循认知规律 解析重点难点

用初等变换法求逆矩阵的原理 (结合板书)

若A可逆，则A可经一系列行初等变换变为E.

利用初等变换求矩阵的逆矩阵的方法

$$(A,E)\xrightarrow{\text{行初等变换}}(E,A^{-1})$$

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{列初等变换}}\begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

遵循认知规律 解析重点难点

问题驱动：矩阵通过不同的初等变换得到的行阶梯形，

行最简形，等价标准形是否唯一？

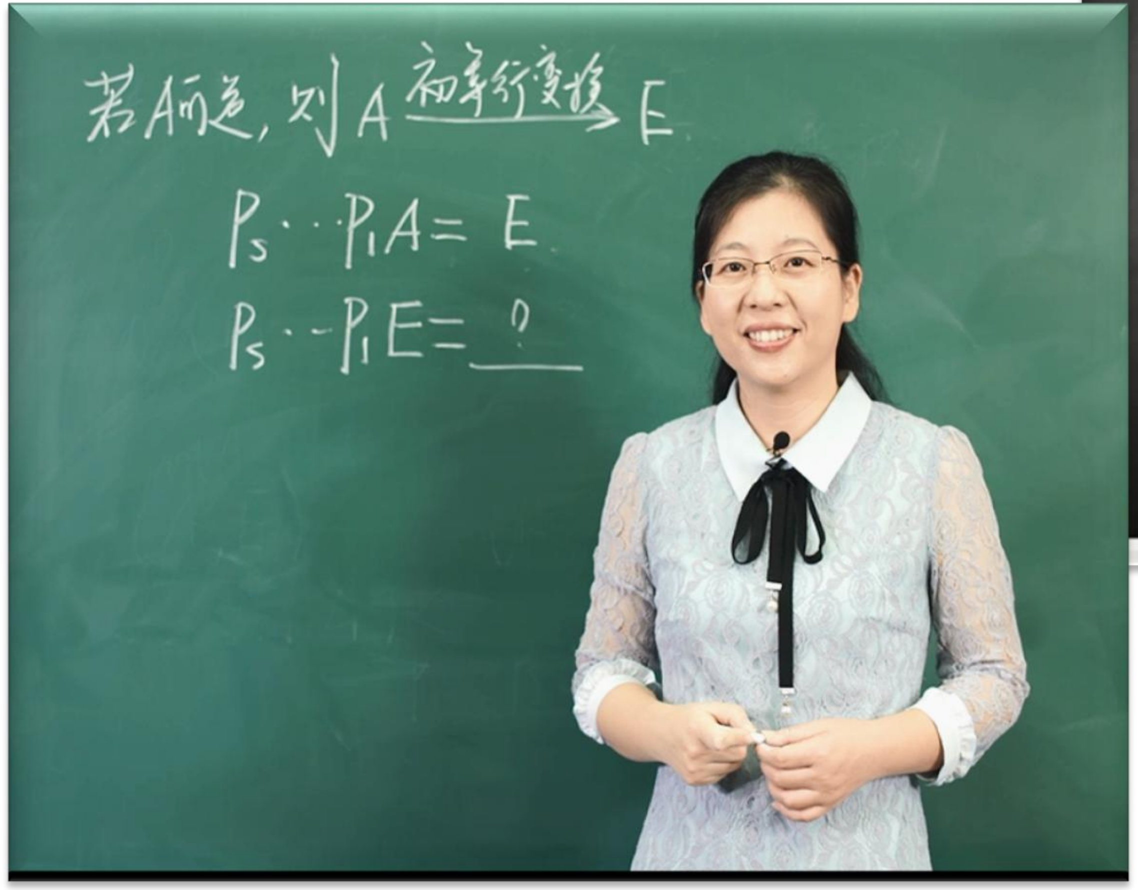
问题

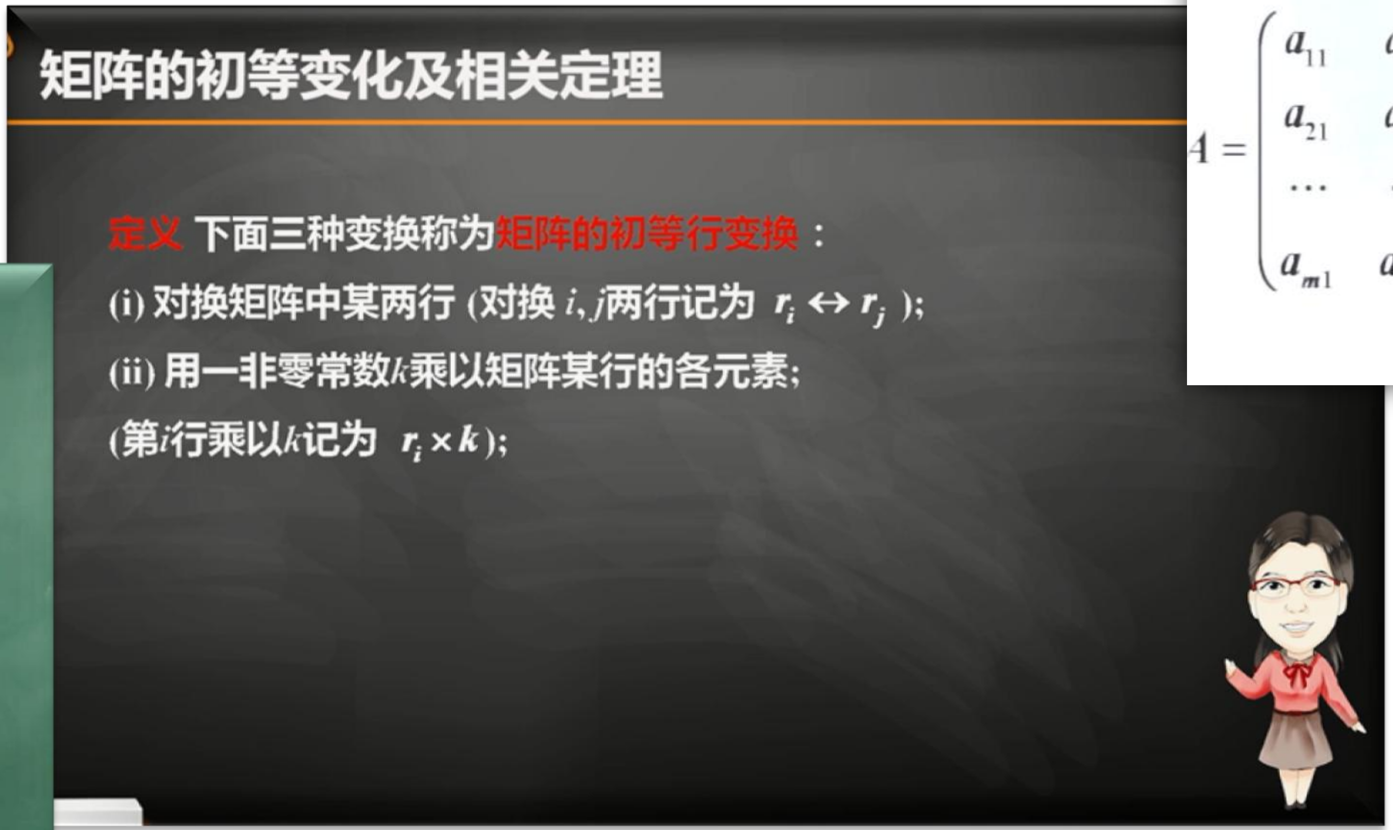
1 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$是否等价？

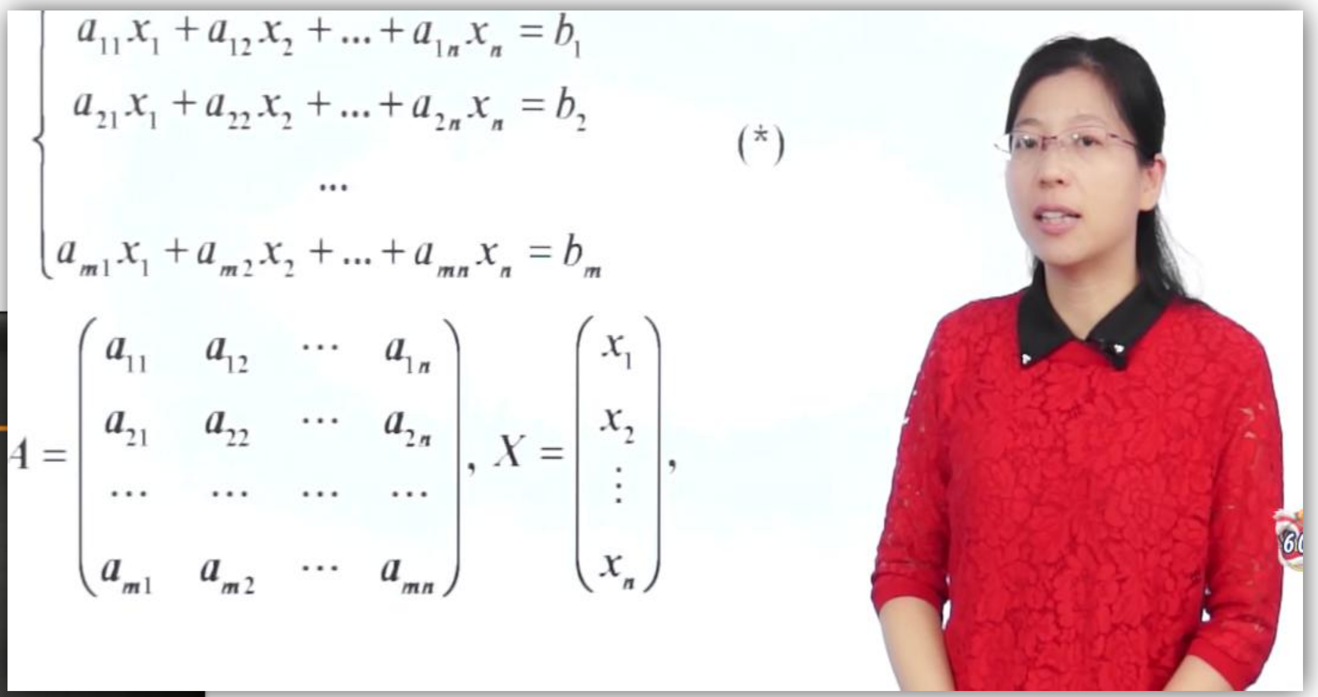
融入“变化中求不变”的数学思想

遵循认知规律 解析重点难点

表现形式







遵循认知规律 解析重点难点

求矩阵的秩的常用方法 (不同角度加深理解)

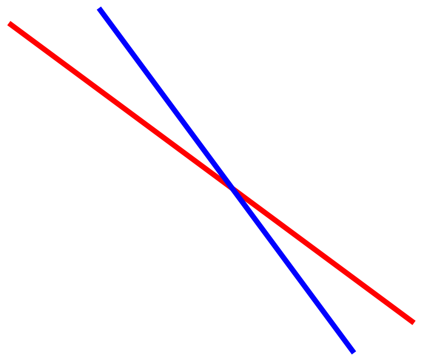
含参数的矩阵的秩的问题求解

例　讨论$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$的秩.

分析应用案例 拓宽学科联系

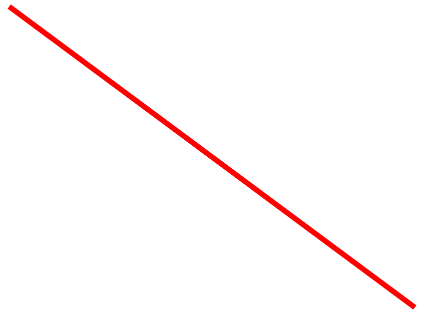
线性方程组

$$\begin{cases} 2x+4y=4 \\ x+y=3 \end{cases}$$



有唯一公共点

$$\begin{cases} 2x+2y=6 \\ x+y=3 \end{cases}$$



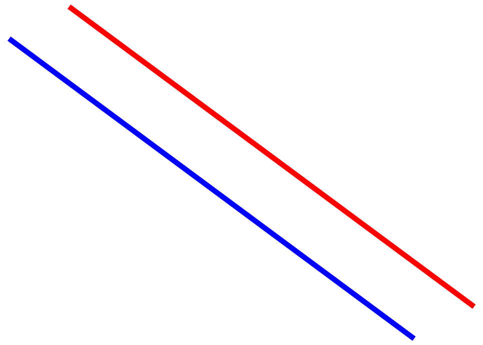
有无穷多公共点

有解

唯一解

无穷多解

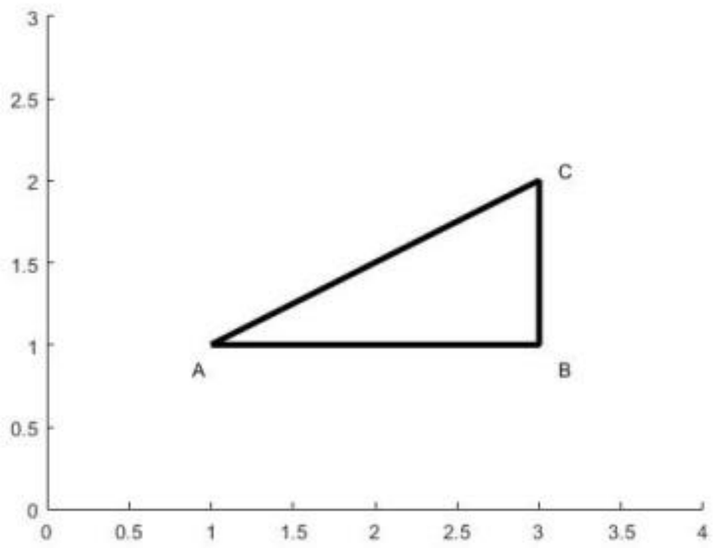
$$\begin{cases} 2x+2y=8 \\ x+y=3 \end{cases}$$



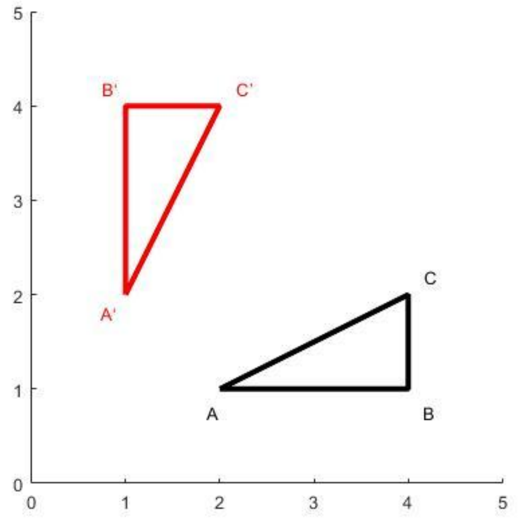
没有公共点 ← 无解

分析应用案例 拓宽学科联系

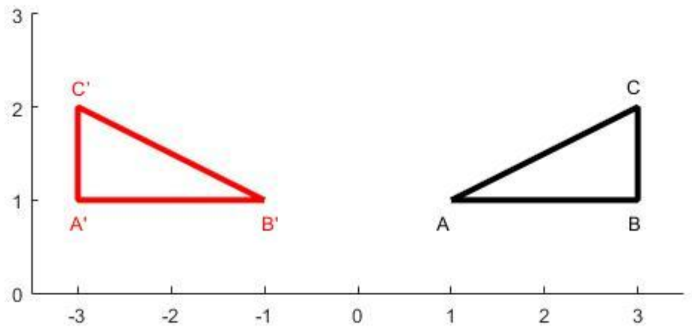
矩阵的初等变换在图像处理中的应用



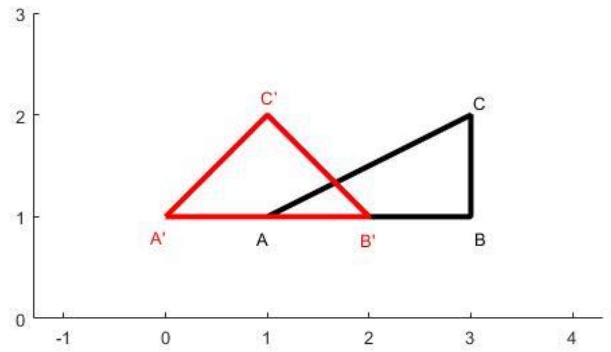
$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix}-1 & \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

拓展思考内容 激发深度思维

通过思考题和补充题，培养学生自主探究的能力和创新性，提高课程的挑战度

1. 验证$E(i\ ,j)=E(j(-1))E(i,j(1))E(j,i(-1))E(i,j(1))$
说明互换矩阵可以表示为若干倍法和消法矩阵的乘积.

2.将矩阵化成行阶梯形、行最简形可以用列变换吗？化标准形呢？

3.是否有列阶梯形、列最简形？

4.若矩阵A可经过行变换化成B，即存在可逆矩阵P，使得$PA=B$，则P是否唯一？

5.等价的矩阵具有相同的秩，但秩相同的矩阵一定等价么？

6. 请总结行(列)满秩矩阵的相关命题.

提供配套资源 推动挑战创新

国家精品课程网站和MOOC资源，提供了各类拓展材料

http://gdjpkc.xmu.edu.cn/

http://www.icourse163.org/course/XMU-1002554004

拓展材料：

华罗庚与线性方程组　　矩阵的LU分解

分块矩阵的初等变换　　等价分类的思想

矩阵的秩的相关不等式

谢谢大家！

THANK YOU FOR YOUR ATTENTION!